



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - Etapa locală 9.02.2013

CLASA a V –a

Subiectul I

(7 puncte)

Aflați cifrele a și b din egalitatea: $3 \cdot \overline{ab} + 3(a+b) = \overline{1b8}$.

Gazeta matematică 7/2005- E.12.585

Subiectul II

(7 puncte)

Fie mulțimea $A = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$ și $\text{card } A = 100$.

- Sunt numerele 123, 321, 399 și 435 elemente ale mulțimii A ?
- Aflați cel mai mare element al mulțimii și suma elementelor din A .

Subiectul III

(7 puncte)

O excursie costă 310 \$. Ionel a achitat costul excursiei folosind bancnote de 5 \$ și de 20 \$, în total 23 bancnote. Câte bancnote de fiecare fel a folosit Ionel?

Subiectul IV

(7 puncte)

Aflați $x, y, z \in N$ dacă $64^x + 16^y + 4^z = 321$

Notă. Timp de lucru efectiv 2 ore

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică 14 puncte.

CLASA a VI –a

Subiectul I

(7 puncte)

Punctele $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{49}, M_{50}$ se află pe dreapta d (în această ordine), astfel încât $M_0M_1 = 1$ cm, $M_1M_2 = 2$ cm, \dots , $M_{49}M_{50} = 50$ cm. Să se afle lungimea segmentului $M_{40}M_{50}$.

Subiectul II

(7 puncte)

Fie unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ adiacente și suplementare. Știind că suplementul complementului unghiului $\angle AOB$ este cu 100° mai mare decât complementul suplementului $\angle BOC$, să se determine măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$.

Gazeta matematică 12/2009

Subiectul III

(7 puncte)

Un număr natural împărțit la 5 dă restul 2 și împărțit la 7 dă restul 3. Aflați restul împărțirii numărului la 35.

Subiectul IV

(7 puncte)

Comparați numerele 31^{11} cu 17^{14} .

Notă. Timp de lucru efectiv 2 ore

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică 14 puncte.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ - Etapa locală 9.02.2013

CLASA a VII –a

Subiectul I

(7 puncte)

Comparați numerele:

$$a = 3^0 + 3^1 + \dots + 3^{148} + 3^{149} \text{ și } b = 5^0 + 5^1 + \dots + 5^{98} + 5^{99}.$$

Gazeta matematică 5/2009-E.13194

Subiectul II

(7 puncte)

Calculați $x + y + z$ știind că: $\frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z}$ și $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$.

Gazeta matematică – enunț modificat

Subiectul III

(7 puncte)

Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle A) = 20^\circ$ și $m(\angle C) = 40^\circ$. Mediatoarea laturii (BC) intersectează dreapta AB în N, iar mediatoarea segmentului (AN) intersectează pe AC în E.

Să se determine $m(\angle BEN)$.

Gazeta matematică 5/2006-E.13197

Subiectul IV

(7 puncte)

În triunghiul ABC $m(\angle A) = 80^\circ$, $m(\angle B) = 40^\circ$, fie AA' înălțime, BB' bisectoare și CC' înălțime. Arătați că triunghiul determinat de intersecțiile dreptelor AA', BB', CC' este isoscel.

Culegere de probleme

Notă. Timp de lucru efectiv 3 ore

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică 14 puncte.

CLASA a VIII –a

Subiectul I

(7 puncte)

a) Să se arate că dacă $a < b$ și $x < y$, atunci $ax + by > ay + bx$.

b) Comparați numerele: $a = 200^{101} + 243^{101}$ și $b = 216^{101} + 225^{101}$.

Gazeta matematică 5/2006-E.13198

Subiectul II

(7 puncte)

a) Demonstrați că ecuația $(x+1)(x+2) = y(y+2)$ nu are soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Demonstrați că ecuația $(x+1)(x+2) = (y+2)(y+3)$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Gazeta matematică 3/2008-E.13627

Subiectul III

(7 puncte)

Pe planul pătratului ABCD cu latura de 2 cm, se duce perpendiculara în A pe care se ia punctul E astfel încât $AE = 2\sqrt{2}$. Să se calculeze distanța dintre EC și BD.

Subiectul IV

(7 puncte)

Triunghiurile ABC și BCD sunt situate în plane diferite, iar (CM) și (CN) sunt medianele corespunzătoare laturilor AB respectiv BD.

a) Arătați că $MN \parallel (ACD)$.

b) Dacă T și S sunt centrele de greutate ale celor două triunghiuri, arătați că $TS \parallel (ACD)$.

Culegere de probleme

Notă. Timp de lucru efectiv 3 ore

Punctajul minim de calificare la etapa următoare a olimpiadei de matematică 14 puncte.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y) care verifică relația:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

Subiectul 2 (7 puncte)

Se consideră 24 de numere prime mai mari sau egale cu 5. Să se arate că suma pătratelor lor este divizibilă cu 24.

E: 26526/ Gazeta Matematică nr.11/2011

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie ΔABC și punctele E, F ; $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$, astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{4}$

Dacă M este mijlocul lui AB , N mijlocul lui AC și R mijlocul lui EF să se arate că punctele M, R și N sunt coliniare.

Subiectul 4 (7 puncte)

Determinați numerele reale nenule $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, astfel încât:

$$\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \frac{2n+1}{3}, \quad \forall n \geq 2.$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 9.02.2013
CLASA a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$3^x - 2^y = 19$$

$$3^y - 2^x = 19$$

Supliment Gazeta Matematică 11/2012

Subiectul 2 (7 puncte)

a) Fie z_1 și z_2 două numere complexe diferite astfel încât $|z_1| = |z_2|$.

Să se arate că $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ avem $|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1|$.

b) Fie z_1 și z_2 două numere complexe diferite. Să se arate că dacă există

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ astfel încât $|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1|$ atunci $|z_1| = |z_2|$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Dacă $z_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sunt distincte și au proprietățile $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ și $z_1 + iz_2 = z_3 + iz_4$, atunci $\exists z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3| = |z - z_4|$.

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie $a > 1$ și $b \geq 0$. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{a^n + b} x = \log_{a^x + b} n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Punctajul minim de calificare la etapa județeană a
olimpiadei de matematică este de 14 puncte.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013
CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$

Subiectul 2 (7 puncte)

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive astfel încât $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul este monoton și mărginit și are limita 0.

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^1 + \frac{1}{2}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n}C_n^n}{2^2 + \frac{1}{2}2^3 + \dots + \frac{1}{n}2^{n+1}}.$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 09.02.2013 - CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

$$\text{Fie } G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} / a, b, c \in R \right\}.$$

- a) Să se arate că G este parte stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricilor.
- b) Să se arate că dacă $a, b, c \in R$ atunci există $x, y, z \in R$ astfel încât:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^n = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Subiectul 2 (7 puncte)

$$\text{Fie } I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx, n \in N^*$$

- a) Să se calculeze I_1 .
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

Gazeta Matematică nr.1/2012

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se determine funcțiile $f: R \rightarrow R$, care admit primitive și au proprietatea că $(f \circ f)(x) = -x^3, \forall x \in R$.

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se calculeze integrala:

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x^n}{x^{3n+1} + x^{2n+2} + x^{2n} + x^{n+1} + x^{n-1} + 1} dx,$$

unde $a > 0, n \in N^*$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.